



EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

I) A 4ª proporcional

Dizemos que o segmento x é a 4ª proporcional entre os segmentos a, b e c quando

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}. \quad (1)$$

Usando o Teorema de Tales podemos obter uma construção para x na relação (1).

Construção:

1º Passo: Sobre um ângulo qualquer de vértice O tomemos sobre um lado $OA = a, AC = c$ e sobre o outro lado $OB = b$;

2º Passo: Traçando por C paralela a AB , obtemos o ponto D na semi-reta OB . Então, $BD = x$ é a solução da equação (1).

II) Construir graficamente as expressões $\sqrt{a^2 + b^2}$ e $\sqrt{a^2 - b^2}$.

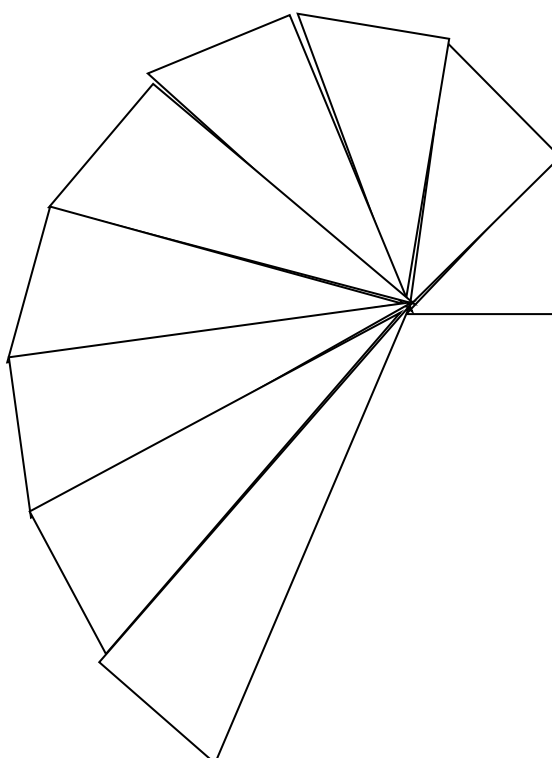
- Construção: Se $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ onde a e b são segmentos dados, então x é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são a e b .
- Se $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ então x é agora um cateto de um triângulo retângulo de hipotenusa a , onde o outro cateto é igual a b .

Aplicação: Construir graficamente a expressão $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

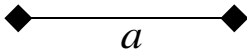
Solução: Faça inicialmente $m = \sqrt{a^2 + b^2}$ e em seguida $x = \sqrt{m^2 + c^2}$

III) Construção de $a\sqrt{n}$, onde n é um número natural

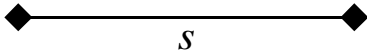
“Dado um segmento de reta de medida a podemos obter todos os segmentos da seqüência $a\sqrt{2}, a\sqrt{3}, a\sqrt{4}, \dots$ pela óbvia construção da figura abaixo.”



Aplicação 1: Dado o segmento de reta abaixo, construir $a\sqrt{21}$.



Aplicação 2: Construir um quadrado conhecendo a soma S da medida da diagonal com o lado.



Solução Algébrica: Sendo a a medida do lado do quadrado procurado, encontramos $a = s(\sqrt{2} - 1)$.

Solução Geométrica:

IV) Média Geométrica:

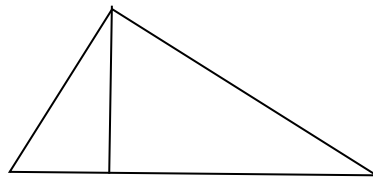
Dados dois segmentos a e b , definimos a sua **média aritmética** por

$$m = \frac{a+b}{2}$$

e sua **média geométrica** por

$$g = \sqrt{ab}.$$

Construção: Pode ser feita utilizando-se as conhecidas relações do triângulo retângulo:



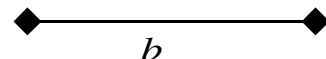
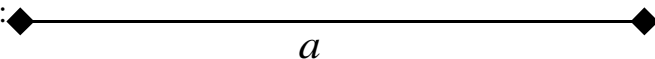
$$h^2 = m \cdot n \text{ e } b^2 = a \cdot m$$

A primeira relação significa que a altura relativa a hipotenusa é média geométrica entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa;

Aplicação: Resolver graficamente a equação $x^2 - ax + b^2 = 0$, onde a e b são segmentos dados.

Observação: Note que a equação acima só admite solução se $a > 2b$.

Dados:



Solução Algébrica: Sendo x_1 e x_2 as raízes, temos que $x_1 + x_2 = a$ e $x_1 \cdot x_2 = b^2$. Neste caso o problema passa então a ser o de determinar dois segmentos (x_1 e x_2), conhecendo-se a sua soma e a sua média geométrica.

Solução Geométrica:

Exemplo: Resolver graficamente a equação $x^2 - 12x + 4 = 0$